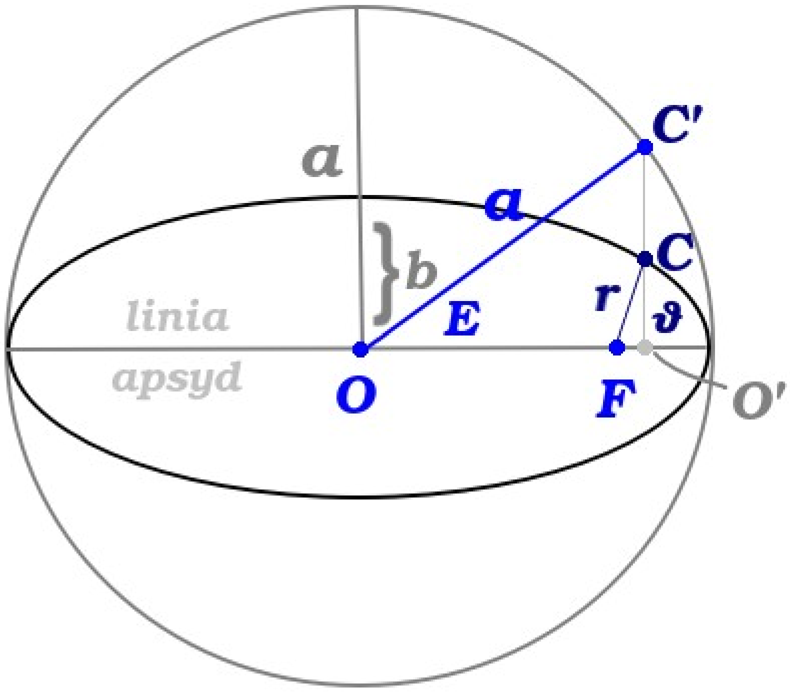
Anomalie i efemerydy



Obiekt porusza się po swojej orbicie – elipsie pod wpływem przyciągania masywnego ciała (Ziemi) leżącego w ognisku *F*, a zatem będąc jego satelitą. Naturalne współrzędne biegunowe satelity (punktu *C)* w dowolnym momencie *t* wynoszą *(r; ϑ).* Kąt *ϑ* nazywa się **anomalią prawdziwą** obiektu.

Jakkolwiek jest ona związana z fizycznym położeniem ciała na jego torze, to należy sobie zdawać sprawę, że z Ziemi nie postrzegamy toru obiektu jako regularnej elipsy, ponieważ jest ona zrzutowana na sferę niebieską oraz sama platforma obserwacji – Ziemia – rotuje w ruchu dobowym. Tym bardziej, jeśli satelita obiega zupełnie inne centrum, niż Ziemię, z której go obserwujemy – wówczas trzeba składać ruchy orbitalne obserwatora, centrum obiegu oraz samego satelity, ażeby wytłumaczyć widome „błądzenie” obiektu na naszym niebie (przy tej pracy widzimy Kopernika na Placu Staszica w Warszawie, dokonującego pomiaru z pomocą *astrolabium*). Składania kół (ruchów oscylacyjnych po okręgu) dla uzyskania dowolnego ruchu okresowego historycznie dokonywano za pomocą *deferensów* i *epicykli* (Ptolemeusz), a współcześnie służy temu *analiza harmoniczna* (Fourier), opierająca się na tej samej zasadzie.

Niezależnie od tych faktów, dane dotyczące obiektów w odniesieniu do ich elementów orbity trzeba jednak gromadzić i skatalogować w jakimś stałym formacie, a anomalia prawdziwa jest najbardziej „fizyczną” z miar.

Zarówno historycznie (Kepler) jak i obecnie, wprowadza się oprócz anomalii prawdziwej, dwie alternatywne miary położenia satelity *C* na jego orbicie, obie oparte na okręgu o promieniu *a*, opisanym na elipsie, gdzie *a* to jej półoś wielka. Miary te, zwane anomalią mimośrodową oraz średnią, także nie mają waloru ich bezpośredniego pomiaru z obserwacji, jednak można je między sobą względnie łatwo przeliczać – zaś dzięki temu, że anomalię średnią bardzo łatwo wyznaczyć na podstawie ciągłej obserwacji satelity, można w konsekwencji podać wartość dowolnej anomalii dla konkretnego momentu czasu – to znaczy, podać **efemerydę** danego zdarzenia na niebie: czas i miejsce wydarzenia z udziałem tego satelity.

Anomalią mimośrodową nazwiemy kąt *E* (rys.), panujący między linią łączącą środek *O* (elipsy i koła) z punktem *C'* na łuku okręgu, a *linią apsyd* (łączącą perygeum i apogeum elipsy – stanowiącą jej oś symetrii). Punkt *C'* powstaje poprzez odłożenie na okręgu pod kątem prostym do linii apsyd położenia satelity *C* na elipsie. Ów kąt prosty wyznacza nam także pomocniczy punkt *O'* na linii apsyd.

Tak więc mamy dwa trójkąty prostokątne: jeden *OC'O'* o kącie *E* i przeciwprostokątnej *a*, drugi *FCO'* o kącie ϑ i przeciwprostokątnej *r.*

Jeżeli środek układu współrzędnych zwiążemy naturalnie z punktem *O*, a oś OX pokryjemy z linią apsyd, to współrzędna dowolnego punktu *O'* znajduje się w przedziale od -*a* do *a* i wynosi pewne x_0. Jaki jest wówczas stosunek *y*-owych współrzędnych punktów *C'* i *C*, czyli $\frac{y_O}{y_E}$? Jedna z nich słucha równania okręgu, druga – równania elipsy:

$$x_0^2 + y_O^2 = a^2$$
$$\left(\frac{x_0}{a}\right)^2 + \left(\frac{y_E}{b}\right)^2 = 1$$

$$\left(\frac{y_O}{y_E}\right)^2 = \frac{a^2 - x_0^2}{b^2 - \left(\frac{b}{a}\right)^2 x_0^2} = a^2\,\frac{a^2 - x_0^2}{a^2 b^2 - b^2 x_0^2} = \frac{a^2}{b^2}\ .$$

Mimośrodem *e* nazywamy stosunek $e := \frac{OF}{a} = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2}}$ $\left(\text{dlaczego}\,?\right) \Rightarrow 1 - e^2 = \left(\frac{b}{a}\right)^2$.

(Odpowiedź *dlaczego:* suma odległości każdego punktu na elipsie od obu ognisk wynosi z definicji *2a.* A zatem od punktu wyznaczonego przez półoś małą *b* (tego o największej współrzędnej *y*) do ogniska *F* jest dokładnie *a*).

To pociąga za sobą, że zawsze $\frac{y_E}{y_O} = \sqrt{1 - e^2}$ (i).

Odcinek *OO'* = *OF* + *FO'*, czyli

$$a\cdot e + r\cos\vartheta = a\cos E \Leftrightarrow r\cos\vartheta = a\left(\cos E - e\right) \quad (1).$$

Skoro $\dfrac{y_E}{y_O} = \dfrac{CO'}{C'O'} = \dfrac{r\sin\vartheta}{a\sin E}$, to na mocy (i),

$$r\sin\vartheta = \sqrt{1-e^2}\, a\, \sin E \quad (2).$$

Obliczając $(1)^2 + (2)^2$ mamy

$$r^2 = a^2\left(\cos^2 E - 2e\cos E + e^2\right) + \left(1-e^2\right)a^2\sin^2 E =$$
$$= a^2 - 2a^2 e\cos E + \underbrace{a^2e^2 - a^2e^2\sin^2 E}_{=\,a^2e^2\cos^2 E} = a^2\left(1-2e\cos E + e^2\cos^2 E\right) = a^2\left(1-e\cos E\right)^2$$
$$\Rightarrow\ r = a\left(1-e\cos E\right) \quad (3).$$

Dodajmy (1) + (3) stronami:

$$r\left(\cos\vartheta + 1\right) = a\left(\cos E - e\right) + a\left(1-e\cos E\right) = a\left(1-e\right)\cos E + a\left(1-e\right) = a(1-e)(1+\cos E)$$

przy czym $\cos\vartheta + 1 = 2\cos^2\dfrac{\vartheta}{2}$, a więc $2r\cos^2\dfrac{\vartheta}{2} = a\left(1-e\right)\left(1+\cos E\right)$ (4).

Analogicznie, odejmując (1) – (3), otrzymujemy

$$-2r\sin^2\frac{\vartheta}{2} = a\left(1+e\right)\left(\cos E - 1\right)$$

(Czytelnik dokładnie sprawdzi wyliczenie), a zatem $2r\sin^2\dfrac{\vartheta}{2} = a\left(1+e\right)\left(1-\cos E\right)$ (5).

Powierzając Czytelnikowi precyzyjne sprawdzenie wyniku, wykonamy obustronne dzielenie (5) / (4), które pozostawia nas z równością – przelicznikiem anomalii prawdziwej i mimośrodowej:

$$\frac{2r\sin^2\frac{\vartheta}{2}}{2r\cos^2\frac{\vartheta}{2}} = \frac{a\left(1+e\right)\left(1-\cos E\right)}{a\left(1-e\right)\left(1+\cos E\right)} = \frac{1+e}{1-e}\,\frac{2\sin^2\frac{E}{2}}{2\cos^2\frac{E}{2}}\ ,$$
$$\operatorname{tg}\frac{\vartheta}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\ \operatorname{tg}\frac{E}{2} \quad (6).$$

Z definicji prędkości polowej i II prawa Keplera $v_S = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\vartheta}{dt} = Const$ (proszę por. z treścią artykułu o prawach Keplera). W szczególności, gdy upłynie jeden okres, pole zataczane na kole wyniesie całe pole elipsy: $v_S \cdot T = \pi\, a\, b$, skąd $dt = \frac{1}{2} \frac{T}{\pi a b} r^2\, d\vartheta$ (7).

Wiedząc, że pochodną tangensa jest odwrotność kwadratu cosinusa, pomocniczo obliczmy $\frac{d\vartheta}{dE}$:

$$\frac{d\vartheta}{dE} = \frac{d\vartheta/2}{dE/2} = \frac{\cos^2\vartheta/2\; d\,\mathrm{tg}\,\vartheta/2}{\cos^2 E/2\; d\,\mathrm{tg}\,E/2} = \{\, na\, mocy(6) \,\} = \frac{\cos^2\vartheta/2}{\cos^2 E/2} \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \quad \text{(ii).}$$

Jeśli czas przejścia satelity przez perygeum oznaczymy *τ*, to odcałkowując równanie (7), i korzystając z (3), (4) oraz (ii), otrzymamy

$$t - \tau = \int_0^{\vartheta} \frac{T}{2\pi a b} r^2\, d\vartheta = \frac{T}{2\pi a b} \int_0^E r^2 \frac{d\vartheta}{dE}\, dE =$$
$$= \frac{T}{2\pi a b} \int_0^E a^2 (1 - e\cos E)^2 \frac{1}{2a(1 - e\cos E)} \frac{2a(1-e)\cos^2 E/2}{\cos^2 E/2} \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\, dE$$
$$\Leftrightarrow$$
$$t - \tau = \frac{T}{2\pi} \frac{a}{b} \underbrace{\sqrt{1-e^2}}_{=\frac{b}{a}} \int_0^E (1 - e\cos E)\, dE = \frac{T}{2\pi}(E - e\sin E) \quad (7).$$

Wprowadzając pojęcie **anomalii średniej**, jako kąta na okręgu przyrastającego ze stałą szybkością i o tym samym okresie co obiekt,

$$M := 2\pi \frac{t - \tau}{T} \quad ,$$

z (7) otrzymujemy $M = E - e\sin E$. Jest to równanie przestępne na *E*, które można rozwiązać metodą kolejnych przybliżeń. *M* z łatwością wyznaczamy z obserwacji pełnego obiegu satelity wokół ogniska, tzn. poznając długość okresu *T*. Mimośród *e* – np. z obserwacji różnicy w prędkościach liniowych obiektu w perygeum i apogeum (i ze stałości prędkości polowej).

$$E_1 = M + e\sin \underbrace{M}_{\text{zamiast } E_1} \quad ,$$
$$E_2 = M + e\sin E_1 \quad ,$$
$$E_3 = M + e\sin E_2 \quad ,$$

i tak dalej, dopóki nie otrzymamy żądanej przez nas precyzji, tj. $|E_{n+1} - E_n| < \delta$. Mając znalezioną anomalię mimośrodową *E*, z równania (6) wylicza się anomalię prawdziwą ϑ.

Korzystając zaś z III prawa Keplera i porównując orbitę satelity z orbitą np. Księżyca (a_K = 3.84·10^5 km, T_K = $27^d.32$), odnajdziemy także i półoś wielką $a = a_K \left(\frac{T}{T_K}\right)^{2/3}$ orbity satelity. Robiąc użytek z dopiero co znalezionej wartości *E* i podstawiając ją do (3), $r = a\left(1 - e\cos E_n\right)$, otrzymujemy drugą brakującą współrzędną biegunową, *r*.

Autor: Marek Pietrachowicz

Przykład do przećwiczenia:

Satelita porusza się po orbicie z okresem $T = 10^h$ oraz mimośrodem $e = 0.1$.

Policzyć współrzędne (r, ϑ) po 2h od przejścia przez perygeum. Zachować dokładność do 2” (tj. 0.00001 rad).

$$M = \frac{2\pi}{T}\left(2 - 0\right) \approx 1.25664 \quad .$$

$$E_1 = M + e\sin M \approx 1.35174 \quad ,$$

$$\ldots \; E_4 = M + e\sin E_3 \approx 1.351430 \approx E_3 \quad .$$

$$\vartheta \approx 1.4532 \text{ rad; } a \approx 23616 \text{ km.}$$

$$r \approx 23202 \text{ km.}$$

Kontrprzykład

Kometa Halley’a ma orbitę o mimośrodzie 0.9673 (e = 1 określa parabolę). Przy tak wysokiej ekscentryczności (równoważna nazwa mimośrodu) orbity, nawet 30 iteracji nie daje satysfakcjonującego przybliżenia na *E*.